Folie zur Vorlesung
“Wahrscheinlichkeitsrechnung und Stoch. Prozesse”
19.01.2017

Kapitel X: Stochastische Prozese

Fragestellung:
Untersuchung der zeitlichen Entwicklung eines zufälligen Systems.

Beispiel: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dass die durchnittliche Temperatur bis zum Ende des Jahrhunderts um mehr als 2° Celsius steigt?

Definition: (Stochastischer Prozess)
Ein *stochastischer Prozess* ist eine Abbildung

$$X : \Omega \times T \to \mathbb{R},$$

wobei $T = [0, \infty)$ oder $T = \mathbb{N}_0$.

(a) Schreibweise: $X_t(\omega) = X(\omega, t)$

(b) Wir interpretieren üblicherweise t als Zeitparameter.
d.h. $X_t(\omega)$ beschreibt die zeitliche Entwicklung eines zufälligen Systems.

(c) Die Menge aller Zustände die X_t annehmen kann heisst **Zustandsraum**.

(d) Für ein beliebiges festes $\omega \in \Omega$ heisst die (deterministische) Funktion $t \mapsto X_t(\omega)$ eine **Trajektorie**.

Bemerkung:

Für jedes feste $t \in T$ ist X_t eine Zufallsvariable.

Beispiel:

- Sie X_t die Summe der Augenzahlen nach $t \in \mathbb{N}$ unabhängigen Würfelwürfen.

  $$\Omega = \left\{ a_1 a_2 a_3 \cdots : \ a_i \in \{1, \ldots, 6\} \right\}$$

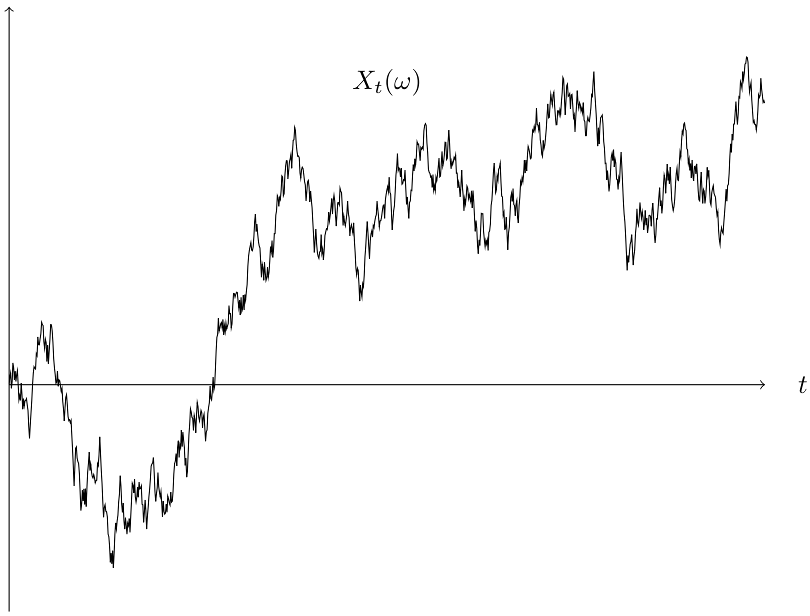
  Menge aller unendlichen Folgen von Ziffern aus $\{1, \ldots, 6\}$.

  Für $\omega = a_1 a_2 a_3 \ldots$ ist

  $$X_t(\omega) = \sum_{i=1}^{t} a_i$$

- *Brownsche Bewegung* (Robert Brown 1827)

  X_t beschreibt die Position eines Pollenteilchens im Wasser welches durch die zufälligen Stöße der Wassermoleküle beeinflusst wird.



Kapitel XI: Poisson Prozess

Fragestellung: Modellierung von Anzahl und Zeitpunkt des Eintretens zufälliger Ereigniss ein einem Zeitintervall/Raumintervall.

Beispiele:

- Anzahl von Netzausfällen in einem Zeitraum
- Anzahl von Schlaglöchern auf einer bestimmten Straßenlänge

Definition: (Zählprozess)

Ein stochastischer Prozess $(N_t)_{t\geq 0}$ mit $N_t \in \mathbb{N}_0$, heisst *Zählprozess*, falls

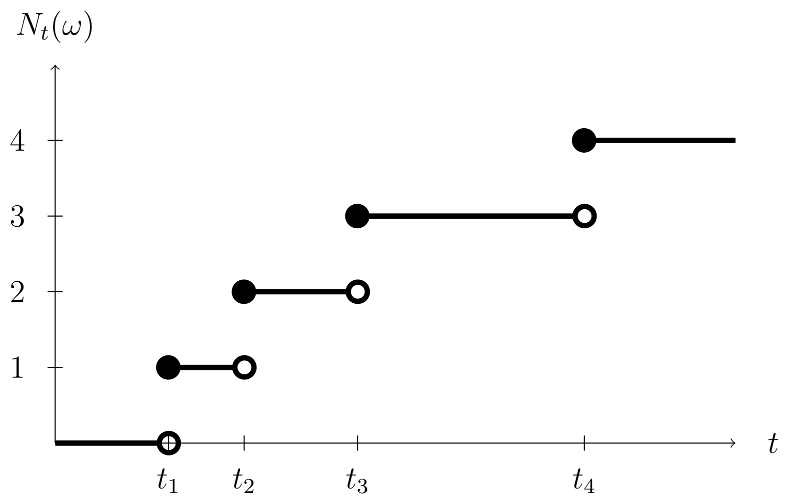
(a) $N_0 = 0$

(b) $N_t \geq N_s$, für $t \geq s$

(c) Die Zuwächse $N_t - N_s$ beschreiben die Anzahl der zufälligen Ereignisse die im Interval $(s, t]$, mit $s < t$, eintreten.

Bemerkungen:

- $N_t = N_t - N_0$ zählt also die Ereignisse im Intervall $[0, t]$.
- Für jedes feste $\omega \in \Omega$ sind die Trajektorien $t \mapsto N_t(\omega)$ monoton wachsende Treppenfunktionen.



t_i ist der Zeitpunkt des i-ten Ereignisses.

Definition:

Ein Zählprozess $(N_t)_{t\geq 0}$ besitzt *unabhängige Zuwächse*, wenn für alle $n \geq 2$ und für jede Wahl von $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n$ gilt, dass die Zufallsvariablen

$$N_{t_2} - N_{t_1}, N_{t_3} - N_{t_2}, \ldots, N_{t_n} - N_{t_{n-1}}$$

stochastisch unabhängig sind.

d.h.: Die Zuwächse in disjunkten Intervallen sind voneinander unabhängig.

Definition: (homogener Poisson-Prozess)

Ein Zählprozess $(N_t)_{t\geq 0}$ heisst *homogener Poisson-Prozess* mit Intensität $\lambda > 0$, wenn

(a) $(N_t)_{t\geq 0}$ besitzt unabhängige Zuwächse

(b) Für alle $s < t$ sind die Zuwächse $N_t - N_s$ Poisson verteilt mit Parameter $\lambda(t-s)$:

$$\mathbb{P}[N_t - N_s = k] = \frac{\big(\lambda(t-s)\big)^k}{k!} e^{-\lambda(t-s)}, \quad \text{für } k = 0, 1, 2, \ldots$$

Eigenschaften homogener Poisson-Prozesse:

(a) $N_t - N_s$ beschreibt die Anzahl der Ereignisse die im Interval $(s, t]$ eintreten.

(b) Für $t = s + \ell$ mit $\ell > 0$ gilt

$$\mathbb{P}[N_{s+\ell} - N_s = k] = \frac{(\lambda\ell)^k}{k!} e^{-\lambda\ell}.$$

Das heisst $N_{s+\ell} - N_s$ und $N_{t+\ell} - N_t$ besitzen die selbe Verteilung.

$\Rightarrow$ Ein homogener Poisson-Prozess besitzt stationäre Zuwächse.

(c)

$$\lim_{\ell\to 0} \mathbb{P}[N_{s+\ell} - N_s = 0] = \lim_{\ell\to 0} \frac{(\lambda\ell)^0}{0!} e^{-\lambda\ell} = 1$$

$\Rightarrow$ Das Eintreten von Ereignissen in kurzen Intervallen ist sehr unwahrscheinlich.

(d)

$$\mathbb{E}[N_{s+\ell} - N_s] = \lambda\ell$$

$\Rightarrow$ Die erwartete Anzahl von Ereignissen in einem Intervall der Länge ℓ ist $\lambda\ell$.

Beispiel: An einer Straßenkreuzung kommt es im Durchschnitt zweimal pro Tag zu einem Verkehrsunfall. Die Anzahl der Unfälle werde durch einen homogenen Poisson-Prozess modelliert. Dazu bezeichne N_t die Anzahl der Unfälle im Intervall $[0, t]$, wobei $t = 1$ ganau einem Tag entspricht.

1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass innerhalb von 3 Tagen mindestens 5 und höchstens 7 Unfälle passieren?
2. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass am ersten Tag genau 1 Unfall, am zweiten Tag höchstens 2 Unfälle und am vierten Tag mindestens 2 Unfälle passieren?
3. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es innerhalb der ersten beiden Tagen mindestens 4 Unfälle gibt, wenn bekannt ist dass es am ersten Tag höchstens zwei Unfälle gab?
4. Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt der 5. Unfall frühestens am 3. Tag auf?
5. Wann ist der vierte Unfall zu erwarten?
6. Mit welcher Wahrscheinlichkeit passiert am ersten Beobachtungstag bis 12 Uhr Mittags der erste Unfall und der dritte Unfall frühestens am zweiten Beobachtungstag?

Fragestellung:

- Wie groß ist der zeitliche Abstand zwischen zwei Ereignissen?
- Wann wird das n-te Ereignis eintreten?

Definition:

Sei $(N_t)_{t\geq 0}$ ein homogener Poisson-Prozess mit Rate λ.

(a) Sei $T_0 = 0$ und für $n \geq 1$

$$T_n = \min\{t \geq 0 : N_t = n\}.$$

T_n ist der Zeitpunkt des n-ten Ereignisses.

(b) $X_n = T_n - T_{n-1}$ für $n \geq 1$
X_n heisst n-te **Zwischenankunftszeit** (Wartezeit)

Bemerkungen:

- $N_t = \max\{n \geq 0 : T_n \leq t\}$
- $\mathbb{P}[N_t \geq n] = \mathbb{P}[T_n \leq t]$
- $T_n = X_1 + \cdots + X_n$

Verteilungen von X_n und T_n?

- X_n ist Exp(λ) verteilt:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[X_n > x] &= \mathbb{P}[T_n - T_{n-1} > x] = \mathbb{P}[N_{T_{n-1}+x} - N_{T_{n-1}} = 0] \\ &= \mathbb{P}[N_x - N_0 = 0] = \frac{(\lambda x)^0}{0!} e^{-\lambda x} \\ &= e^{-\lambda x}\end{aligned}$$

  Daraus folgt

$$\mathbb{P}[X_n \leq x] = 1 - e^{-\lambda x}$$

- Für $n \neq m$ sindX_n und X_m unabhängig, also

$$\mathbb{P}[X_n = a, X_m = b] = \mathbb{P}[X_n = a] \cdot \mathbb{P}[X_m = b].$$

  Beweis: Sei $m > n$

$$\mathbb{P}[X_n > a, X_m > b] = \mathbb{P}[N_{T_{n-1}+a} - N_{T_{n-1}} = 0, N_{T_{m-1}+b} - N_{T_{m-1}} = 0]$$

  Das Ereignis $[N_{T_{n-1}+a} - N_{T_{n-1}} = 0]$ impliziert dass $T_{n-1} + a < T_{m-1}$. Somit sind die betrachteten Intervalle $[T_{n-1}, T_{n-1} + a)$ und $[T_{m-1}, T_{m-1} + b)$ disjunkt.

  Es folgt also aus der Unabhängigkeit der Zuwächse:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[X_n > a, X_m > b] &= \mathbb{P}[N_{T_{n-1}+a} - N_{T_{n-1}} = 0] \cdot \mathbb{P}[N_{T_{m-1}+b} - N_{T_{m-1}} = 0] \\ &= \mathbb{P}[X_n > a] \cdot \mathbb{P}[X_m > b]\end{aligned}$$

- $T_n = X_1 + \cdots + X_n$.

  Es folgt aus Übungsbeispiel 58 für die Dichtefunktion von T_n:

$$f_{T_n}(t) = \begin{cases} \frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t}, & \text{für } t \geq 0 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

  T_n ist Gamma-verteilt mit Parametern n und λ. (Schreibweise: $T_n \sim \text{Gamma}(n, \lambda)$)

$$\mathbb{E}[T_n] = \frac{n}{\lambda} \qquad \text{Var}(T_n) = \frac{n}{\lambda^2}$$

- Verteilungsfunktion von T_n:

$$F_{T_n}(t) = \mathbb{P}[T_n \leq t] = \mathbb{P}[N_t \geq n] = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

Satz: (Charakterisierung des hom. Poisson-Prozesses) Sei $(N_t)_{t\geq 0}$ ein Zählprozess mit Zwischenankunftzeiten $(X_n)_{n\geq 1}$ die unabhängig und identisch $\mathrm{Exp}(\lambda)$ verteilt sind.

Dann ist $(N_t)_{t\geq 0}$ ein hom. Poisson-Prozess mit Rate λ.

Beweis:

Setze $T_0 = 0$ und $T_n = X_1 + \cdots + X_n$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[N_t = n] &= \mathbb{P}[N_t \geq n] - \mathbb{P}[N_t \geq n+1] \\
&= \mathbb{P}[T_n \leq t] - \mathbb{P}[T_{n+1} \leq t] \\
&= \int_0^t f_{T_n}(z)dz - \int_0^t f_{T_{n+1}}(z)dz \\
&= \int_0^t \frac{\lambda^n z^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda z} dz - \int_0^t \frac{\lambda^{n+1} z^n}{n!} e^{-\lambda z} dz \\
&= \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \left(\int_0^t z^{n-1} e^{-\lambda z} dz - \frac{\lambda}{n} \int_0^t z^n e^{-\lambda z} dz \right)
\end{aligned}$$

Partielle Integration des ersten Integrals: $\int u'v = uv - \int uv'$

$$\int_0^t \underbrace{z^{n-1}}_{u'} \underbrace{e^{-\lambda z}}_{v} dz = \frac{z^n}{n} e^{-\lambda z} \bigg|_0^t + \frac{\lambda}{n} \int_0^t z^n e^{-\lambda z} dz$$

Es folgt

$$\mathbb{P}[N_t = n] = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}.$$

Die Unabhängigkeit und Stationarität der Zuwächse folgt aus der Unabhängigkeit der (X_n) und der Gedächtnislosigkeit der Exponentialverteilung.

Satz: (Zusammenhang mit der Binomalverteilung) Sei $(N_t)_{t\geq 0}$ ein Poisson-Prozess mit Rate λ, dann gilt für $0 < s < t$ und $0 \leq k \leq n$

$$\mathbb{P}[N_s = k | N_t = n] = \binom{n}{k} \left(\frac{s}{t}\right)^k \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{n-k}.$$

binomialverteil mit Parametern n und $p = s/t$.

Beweis:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[N_s = k | N_t = n] &= \frac{\mathbb{P}[N_s = k, N_t = n]}{\mathbb{P}[N_t = n]} \\
&= \frac{\mathbb{P}[N_s = k, N_t - N_s = n - k]}{\mathbb{P}[N_t = n]} \\
&= \frac{\mathbb{P}[N_s = k] \cdot \mathbb{P}[N_t - N_s = n - k]}{\mathbb{P}[N_t = n]} \\
&= \frac{\frac{(\lambda s)^k}{k!} e^{-\lambda s} \cdot \frac{(\lambda(t-s))^{n-k}}{(n-k)!} e^{-\lambda(t-s)}}{\frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!} \underbrace{\lambda^k \lambda^{n-k} \lambda^{-n}}_{=1} \cdot \underbrace{e^{-\lambda(s+t-s-t)}}_{=1} \cdot s^k (t-s)^{n-k} t^{-n} \\
&= \binom{n}{k} \left(\frac{s}{t}\right)^k \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{n-k}
\end{aligned}$$

Bemerkung:

Für $k = n = 1$ und $0 < s < t$ besagt der Satz:

$$\mathbb{P}[T_1 \leq s | N_t = 1] = \mathbb{P}[N_s \geq 1 | N_t = 1] = \mathbb{P}[N_s = 1 | N_t = 1] = \frac{s}{t}.$$

Unter der Bedingung dass $N_t = 1$ ist der Zeitpunkt des ersten Ereignisses T_1 gleichverteilt auf dem Intervall $[0, t)$.